E.N.S.E.T. 1978

Section A1 (Programme M')

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles f continues sur $\mathbb{R}$, telles que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On admettra que les fonctions de E sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

On munit E de la norme suivante

$$\forall f \in E \quad , \quad \|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

E_2 désigne l'espace des fonctions réelles f, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que f, f' et f'' appartiennent à E.

Si $f, g \in E$, $f \leqslant g$ signifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Si $f, g \in E$ inf (f, g) , sup (f, g) ; f^+ désignent respectivement les éléments de E définis par

$$\inf (f, g)(x) = \inf \big(f(x), g(x)\big) \ , \ \sup (f, g)(x) = \sup \big(f(x), g(x)\big) \ ,$$
$$f^+(x) = \sup \big(f(x) \ , \ 0\big).$$

On définit de façon analogue le sup et le inf d'une famille finie d'éléments de E.

On admettra, sans en faire la démonstration, que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de E telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ vaut 0, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

La partie I *sert de préliminaire à la partie* II. *Celle-ci n'utilise de* I *que les résultats explicités dans* I.4° et I.6°.

I

Soit L une forme linéaire sur E telle que

$$\forall f \in E \ , \ f \geqslant 0 \Rightarrow L(f) \geqslant 0.$$

1° Donner des exemples de telles formes linéaires.

2° Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \|f_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \text{ et } L(f_n) \geqslant 1.$$

.../...

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Montrer que la fonction f ainsi définie appartient à E et en déduire une contradiction.

Démontrer alors que L est une forme linéaire continue sur E.

3° Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et un réel $\alpha > 0$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \|f_n\| \leqslant 1 \ , \ f_n \geqslant 0 \ \text{ et } \ L(f_n) \geqslant \alpha.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\beta_n = \sup_{p \geqslant n} L\left(\sup_{n \leqslant i \leqslant p} f_i\right)$ et l'on choisit un entier $p(n) \geqslant n$ tel que $L(g_n) \geqslant \beta_n - \frac{\alpha}{2^{n+2}}$, où l'on pose $g_n = \sup_{n \leqslant i \leqslant p(n)} f_i$.

a. Montrer

- $\forall m, n \in \mathbb{N} \ , \ m \geqslant n \Rightarrow L\left((g_m - g_n)^+\right) \leqslant \frac{\alpha}{2^{n+2}}$.
- $\forall m \in \mathbb{N}, L(g_m) \geqslant \alpha$.

b. Déduire de *a.* que la suite $\left[L(h_m)\right]_{m\in\mathbb{N}}$, où l'on pose $h_m = \inf_{0 \leqslant n \leqslant m} g_n$, est minorée par un nombre strictement positif à préciser.

c. Montrer que la suite de fonctions $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

4° Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que

- $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \|f_n\| \leqslant 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} L(f_n)$ existe et vaut 0.

5° Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ |h_n(x)| \leqslant 1$
- $\forall x \in [0,1] \ , \ \lim_{n \to +\infty} h_n(x) = 0.$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx$ existe et vaut 0.

6° Soit u une fonction continue bornée sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0,1] \ , \ u(t,.) \in E.$$

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ g(x) = \int_0^1 u(t,x)\,dt$$

est un élément de E.

(Si u est une fonction de deux variables, on note

$u(t,.)$ la fonction $x \longmapsto u(t,x)$ et

$u(.,x)$ la fonction $t \longmapsto u(t,x)$).

II

$\mathbb{R}^+$ désigne $[0, +\infty[$.

Soit $\mathfrak{G}$ un espace vectoriel réel de fonctions u réelles continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$(t,x) \longmapsto u(t,x).$$

On suppose que $\mathfrak{G}$ vérifie les propriétés suivantes :

P 1. $\forall u \in \mathfrak{G} \ , \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ u(t,.) \in E.$

P 2. $\forall u \in \mathfrak{G} \ , \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ ,$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, u(0,x) \leqslant 1\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, u(t,x) \leqslant 1\right).$$

P 3. $\forall f \in E \ , \ \exists u \in \mathfrak{G} \ , \ u(0,.) = f.$

P 4. $\forall u \in \mathfrak{G}, \forall s \in \mathbb{R}^+ \ , \ \forall a \in \mathbb{R},$

$$[(t,x) \longmapsto u(s+t, a+x)] \in \mathfrak{G} \ \text{ et}$$

$$[(t,x) \longmapsto u(t, -x)] \in \mathfrak{G}.$$

P 5. $\forall u \in \mathfrak{G},$

$$\left(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [-\varepsilon, 0[\cup]0, +\varepsilon], u(0,0) < u(0,x)\right)$$
$$\Rightarrow \left(\exists \eta > 0, \forall t \in [0,\eta] \ , \ u(0,0) \leqslant u(t,0)\right).$$

Intuitivement, si $u \in \mathfrak{G}$, $u(t,x)$ est la température à l'instant t du point d'abscisse x d'une barre infinie. Chacune des propriétés vérifiées par $\mathfrak{G}$ admet alors une interprétation physique simple. Le but du problème est de montrer que les éléments réguliers de $\mathfrak{G}$ sont solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles.

. . . / . . .

1° Montrer que :

a. $\forall u \in \mathfrak{G}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\| u(t, .) \| \leqslant \| u(0, .) \|$.

b $\forall u \in \mathfrak{G}$, $\big(u(0, .) \geqslant 0 \big) \Rightarrow \big(\forall t \in \mathbb{R}^+ , u(t, .) \geqslant 0 \big)$.

c. Pour tout élément f de E il existe un et un seul élément u de $\mathfrak{G}$ tel que $u(0, .) = f$. On pose $u = \mathrm{K}f$.

d. $\forall f \in \mathrm{E}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{K}\check{f}(t, x) = \mathrm{K}f(t, -x)$ où $\check{f}$ est la fonction $x \longmapsto f(-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

e. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que $\{ \| f_n \| ; n \in \mathbb{N} \}$ soit majoré et si il existe un élément f de E tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe et vaut $f(x)$, alors

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \mathrm{K}f_n(t, x) = \mathrm{K}f(t, x).$$

2° Montrer que, si $u \in \mathfrak{G}$ et $u(0, .) \in \mathrm{E}_2$,

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t, .) \in \mathrm{E}_2$,
- $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont dans $\mathfrak{G}$.

3° Cette question et la suivante sont uniquement destinées à introduire les fonctions f_1 et f_2 servant dans la suite du problème.

Soit $f \in \mathrm{E}_2$ et $u = \mathrm{K}f$.

Si c est un réel strictement positif, on pose, pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$v(t, x) = \frac{1}{c} \int_0^c u(s + t, x)\, ds.$$

Montrer que :

a. $g = v(0, .)$ est un élément de E_2 et
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$, $| f'(0) - g'(0) | \leqslant \varepsilon$ et $| f''(0) - g''(0) | \leqslant \varepsilon$.

b. $v = \mathrm{K}g$.

On pourra utiliser la suite de fonctions $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définies par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad , \quad v_n(t, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{kc}{n} + t , x \right).$$

c. g appartient à l'ensemble D des éléments h de E tels que la fonction $t \longmapsto \mathrm{K}h(t, 0)$, définie sur $\mathbb{R}^+$, admette une dérivée à droite en 0 , notée $\dfrac{\partial^+ (\mathrm{K}h)}{\partial t}(0, 0)$.

4° Montrer que l'application $f \longmapsto \big(f'(0) , f''(0) \big)$ de E_2 dans $\mathbb{R}^2$ est surjective.

En déduire, en utilisant II.3°, que sa restriction à $\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{D}$ est aussi surjective.

Pour la suite du problème on fixe f_1 et f_2 dans $\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{D}$ tels que

$$f_1'(0) = 1 \quad , \quad f_1''(0) = 0,$$
$$f_2'(0) = 0 \quad , \quad f_2''(0) = 1.$$

5° Montrer que :

a. $\forall f \in \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{D}$, $\big(f'(0) = f''(0) = 0 \big) \Rightarrow \dfrac{\partial^+ (\mathrm{K}f)}{\partial t}(0, 0) = 0$.

On pourra utiliser la fonction auxiliaire $h_\varepsilon = f + \varepsilon f_2$.

b. $\dfrac{\partial^+ (\mathrm{K}f_1)}{\partial t}(0, 0) = 0$. On pose $k = \dfrac{\partial^+ (\mathrm{K}f_2)}{\partial t}(0, 0)$.

6° Soit $f \in \mathrm{E}_2$ et $u = \mathrm{K}f$.

En considérant la fonction auxiliaire $f - f'(0) f_1 - \big(f''(0) - \varepsilon \big) f_2$, montrer que $\dfrac{\partial^+ u}{\partial t}(0, 0)$ existe et vaut $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0)$.

En déduire que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ existe sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ et que, sur cet ensemble,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

On admettra que si une fonction réelle continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ possède une dérivée à droite continue sur cet intervalle, alors elle est dérivable.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail